

## Camada Limite na Modelagem Física da Coluna de Ar do Saxofone

Luís Carlos de Oliveira<sup>1</sup>, Ricardo Goldemberg<sup>2</sup>, Jônatas Manzolli<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Artes e Núcleo Interdisciplinar de Comunicação Sonora – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) – São Paulo – SP – Brasil

<sup>2</sup>Instituto de Artes - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

[luis\\_jonatas@nics.unicamp.br](mailto:luis_jonatas@nics.unicamp.br), [rgoldem@matrix.com](mailto:rgoldem@matrix.com)

***Abstract.** Using a physical model of a saxophone, the effect of the boundary layer on the air oscillations in the tube will be analyzed. From the laws of Acoustic two kinds of equations will be obtained: one that considers the influence of the boundary layer on the air oscillations (EC) and other that does not (ENC). We hope that applying the model with the EC, the effective gain in the results will describe better the behavior of the saxophone sonority against the computational effort.*

***Resumo.** A partir da modelagem física do saxofone, o efeito da camada limite sobre a oscilação do ar na parede do tubo será analisado. Partindo das leis da Acústica são apresentadas equações que consideram o efeito da parede do tubo (EC) e equações que desprezam este efeito (ENC). Espera-se responder sobre a efetiva vantagem obtida na utilização e análise dos parâmetros das EC na obtenção de resultados, que mediante um maior esforço computacional, possam descrever com maior precisão o comportamento sonoro do saxofone.*

### 1. Introdução

A modelagem física do comportamento acústico de instrumentos musicais vem recentemente ganhando maior intensidade. Benade (1960), físico e músico, foi o precursor e o maior motivador da aplicação desta ferramenta no tratamento dos instrumentos de sopro. Principalmente para a clarineta, oboé e saxofone.

Mais recentemente, Nederveen (1998), Fletcher e Rossing (1998) e Smith (1996) vêm estimulando o emprego da modelagem matemática na abordagem dos instrumentos de sopro. Tendo como partida estas referências, este trabalho procurará analisar como o modelo matemático descreve a acústica do saxofone quando o efeito da camada limite é levado em consideração.

Para tanto, inicialmente serão expostas as equações diferenciais parciais considerando o efeito da camada limite. Em seguida, as equações obtidas serão reduzidas para quando este efeito não é considerado. Os resultados estão em fase de elaboração. No momento serão apresentadas apenas as equações que descrevem o fenômeno e a metodologia que será empregada para resolver este problema.

## 2. Modelos Matemáticos

A intenção primeira é determinar a frequência natural de um saxofone existente ou hipotético a partir de suas dimensões geométricas, propriedades do escoamento e mecânica das palhetas. O ferramental eleito para tal finalidade será a utilização das equações mencionadas acima. Sabe-se que para descrever o escoamento em qualquer tipo de instrumento de sopro, basta resolver, em princípio, as equações de Navier-Stokes. Elas descrevem o escoamento com maior número de detalhes, incluindo as equações de conservação de energia, quantidade de movimento mais a equação de continuidade. Fletcher e Rossing (1998) indicaram, porém, que mesmo para os casos mais simplificados, a solução numérica deste sistema de equações diferenciais parciais e não-lineares requer um computador de grande porte.

O procedimento comumente adotado consiste em utilizar equações semi-empíricas. São modelos matemáticos mais simples que incorporam princípios da mecânica dos fluidos nas hipóteses gerais. Ainda assim, torna-se bastante difícil descrever tal escoamento sem algumas hipóteses simplificadoras. Nederveen (1998) as enumeram como:

*i)O ar no tubo realiza vibrações apenas na direção longitudinal; ii)As dimensões transversais do tubo são pequenas com relação ao comprimento de onda; iii)O corpo do instrumento é modelado geometricamente como um cilindro puro ou um cone puro; iv)A parede do tubo é suficientemente rígida e pesada de modo a não vibrar; v)A parede do tubo possui condutividade térmica e capacidade calorífica suficientemente grande de modo a manter a temperatura constante (despreza a transferência de energia); vi)A camada limite é desprezível, isto é, a distância da parede (onde a velocidade é nula) ao ponto da secção transversal onde a velocidade é aproximadamente constante é desprezível; vii)A geometria real do instrumento de sopro é simplificada. O tubo com seus furos laterais é considerado como uma combinação de pedaços de tubos, sem furo, arranjados em série e paralelo.*

Em conjunto com estas hipóteses simplificadoras, para os diferentes instrumentos de sopro, faz-se necessário promover correções do modelo matemático referentes ao(s):

*Def.1:* a)mecanismo de excitação; b)efeitos da camada limite na parede do tubo; c)desvios da geometria real do corpo do instrumento.

A Frequência Natural Calculada (FNC) a partir desta modelagem apresenta, na maioria das vezes, valor mais baixo que a Frequência Natural do Instrumento (FNI). É comum encontrar frequência até um semitom mais baixo que a FNI. Esta é, então, a motivação deste trabalho. Analisar a influência das hipóteses simplificadoras, como também das correções necessárias, do modelo matemático com relação a uma melhor aproximação da realidade. Em particular, neste trabalho, dentre as três correções mencionadas acima na Def.1, apenas o efeito da camada limite será analisado na modelagem física.

## 3. Conceitos Acústicos e Extensão do Modelo

As perdas que ocorrem nas paredes do tubo são distinguidas em perdas viscosas e térmicas. As perdas viscosas são devido ao atrito do ar com as paredes do tubo que são rugosas microscopicamente. Nederveen (1998) mostrou que as perdas térmicas ocorrem

devido à parede do saxofone estar praticamente à temperatura constante enquanto a temperatura na corrente de ar flutua, principalmente, devido a variações adiabáticas de pressão. Quanto mais próximo à parede, mais os dois efeitos são sentidos.

Em instrumentos de sopro a situação é tal que a influência da parede é sentida em uma estreita camada de fronteira, denominada *camada limite*. Fora da camada limite, a velocidade é praticamente constante através de toda a secção transversal e as mudanças de estado são praticamente adiabáticas.

O saxofone assemelha-se a um tronco de cone, munido com uma boquilha que sustenta uma palheta de bambu ou material sintético como mecanismo de excitação. O truncamento do cone é aproximadamente de 10% de seu comprimento geométrico total. A distância até o ápice (o qual está fora do tubo, ver figura 1) do cone será denotada por  $r$ .

Para incluir o efeito da camada limite sobre as oscilações do ar no tubo, as equações de quantidade de movimento e de continuidade incluem fatores de ajuste (variáveis complexas) que descrevem a ação na parede:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_w \frac{\partial u}{\partial t} \quad -\frac{\partial p}{\partial t} = K_w \frac{\partial u}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (1)$$

onde,

$p$  = pressão sonora relativa,  $r$  = coordenada de posição,  $\rho$  = densidade do ar,  $u$  = velocidade da partícula,  $K$  = modulus “médio” (‘bulk’) do ar,  $a$  = raio do tubo,  $\eta$  = viscosidade do ar,  $\gamma$  = razão entre os calores específicos,  $\lambda$  = condutividade térmica,  $C_p$  = calor específico a pressão constante,  $\omega$  = frequência angular =  $2\pi f$

$$\begin{aligned} \rho_w &= \rho[1 + (1-j)\alpha'_v] & \alpha'_v &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} \\ K_w &= K[1 - (1-j)\alpha'_t] & \alpha'_t &= \frac{1}{a} (\gamma-1) \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho C_p}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Eliminando  $u$  entre estas duas equações e introduzindo a variável adimensional,  $w=kr$ , onde  $k$  é o número de onda (‘wave number’) em  $m^{-1}$ , Nederveen (1998) obteve como solução geral da equação de onda:

$$p = \frac{A}{w} \exp\left(-\beta f + \beta \frac{\epsilon_v}{w}\right) \text{sen}(w + \psi + \beta \ln w + \beta g) \quad \dots\dots\dots (3)$$

onde, as constantes  $A$  e  $\psi$  são complexas e

$$\begin{aligned} \varphi &= (1-j)\varphi', \\ \varphi' &= \beta' \left[ \ln(w_1/w) + g_1 - g \cos 2B + \left(f - \frac{\epsilon_v}{w}\right) \text{sen } 2B + \frac{\epsilon_v}{w^2} \text{sen}^2 B \right] \end{aligned}$$

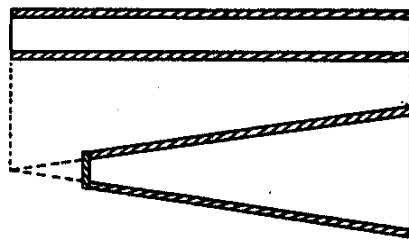
$$B = w + \psi + \beta \ln w + \beta g; \quad \beta = (1-j)\beta' = (1-j)k \frac{r}{2a} \left\{ \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} + (\gamma-1) \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho C_p}} \right\};$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{1 + (\gamma-1) \left( \frac{\lambda}{\eta C_p} \right)^{1/2}}$$

ABRAMOWITZ e STEGUN (1965) apresentam os valores das funções  $f$  e  $g$  tabelados ou determinados analiticamente.

A velocidade  $u$  da partícula pode ser encontrada substituindo esta solução na equação (1). Uma variável bastante útil na análise de oscilações em tubo é a vazão volumétrica  $U$ , que é obtida multiplicando-se a velocidade da partícula  $u$  pela área da secção transversal  $S$ :

$$U = u \times S \tag{4}$$



**Figura 1:** Tubos cilíndrico e cônico com a mesma frequência natural

Igualmente útil para a abordagem deste problema é a relação entre  $p$  e  $U$ . Com este propósito definem-se a impedância acústica  $Z$  e a admitância  $Y$  como:

$$Z = \frac{p}{U} \quad Y = \frac{U}{p} \tag{5}$$

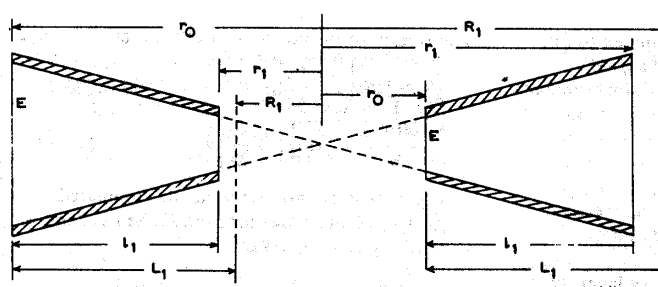
Resolvendo a equação (1) para  $u$  e substituindo em (4) e (5), a admitância tem por expressão:

$$Y = \frac{S(r)}{j\rho c} \left[ \frac{1}{w} + \cot(W_1 - w + \varphi - j\theta) \right] \tag{6}$$

Nas expressões anteriores, todos os termos que possuem  $\beta$  indicam que o efeito da camada limite está sendo levado em consideração. Fazendo  $\beta = 0$  nas equações acima, elas são reduzidas àquelas para o caso onde o efeito da camada limite é desprezado:

$$p = \frac{A}{w} \text{sen}(w + \psi); \quad Y = \frac{S(r)}{j\rho c} \left[ \frac{1}{w} - \cot(w + \psi) \right] \tag{7}$$

Da equação acima se nota a dependência da área da secção transversal  $S$  com a posição  $r$ . Esta equação é válida para um cone expandindo-se para a direita, denominado cone *positivo*. Por convenção, para utilizar esta mesma equação para o cone *negativo* atribuem-se sinais negativos para todas as distâncias até o ápice do cone, ver figura 2.



**Figura 2:** Quantidades e símbolos usados para o cone negativo, onde os valores de  $r$  são negativos (à esquerda) e para o cone positivo, onde os valores de  $r$  são positivos (à direita). O ponto de excitação está em E. Note que o comprimento do tubo,  $l_1 = r_1 - r_0$ , é positivo em ambos os tubos.

Para obter as equações da frequência de ressonância parte-se da equação da admitância empregando duas condições de contorno. Uma no ponto de excitação,  $r=r_0$ , onde a admitância de entrada é conhecida,  $Y_E$  e outra na saída aberta,  $r=r_1$ , onde a admitância de radiação também é conhecida,  $Y_{rad}$ .

#### 4. Metodologia

Para uma melhor compreensão das equações apresentadas e da metodologia a ser adotada, apresentamos a seguir uma noção intuitiva da *camada limite*. Um saxofonista iniciante ao assoprar seu instrumento não obtém uma sonoridade satisfatória. Podemos supor que o ar escoando no interior do tubo não possui velocidade constante. Mas podemos imaginar, por outro lado, que o ar não ocupa homogeneamente toda a extensão diametral do tubo.

À medida que o instrumentista torna-se mais experiente, o ar escoando através do tubo com velocidade constante e ainda consegue preencher uma extensão diametral homogênea maior no interior do tubo. A região (pensando diametralmente) compreendida entre a parede até o ponto onde a velocidade de escoamento é praticamente constante é denominada como *camada limite*. Esta região é estreita na entrada do tubo e vai alargando-se ao longo do comprimento.

Utilizando as equações (6) e (7) da admitância para os casos que consideram e desprezam, respectivamente, o efeito da camada limite juntamente com as condições de contorno descritas na seção anterior pretende-se fazer uma simulação numérica que relacione o tamanho médio desta região com a sonoridade do instrumento. Para a solução e simulação do modelo físico será empregado o software MATLAB. É um programa de grande utilidade para estes casos. Atualmente ele também é capaz de gerar arquivos sonoros (\*.wav) com as características timbrísticas do instrumento determinando as FNC pela modelagem física.

Numa segunda abordagem, significativamente experimental, consiste em fazer amostras da sonoridade de vários saxofonistas com diferentes tempos de experiências. Em seguida obter experimentalmente as admitâncias na entrada e na saída do tubo e comparar estes valores mais as frequências obtidas com os valores obtidos na abordagem anterior. Num terceiro tratamento, porém de possibilidade mais remota, é gerar as amostras sonoras a partir de meios mecânicos, onde não há a interferência do músico, e fazer as mesmas comparações.

## 5. Discussão e Conclusão

Pretende-se mostrar que a sonoridade satisfatória do saxofone é obtida quando a região composta pela camada limite é minimizada. Isto devido ao atrito imposto pelo escoamento do ar em contato com a parede do instrumento.

Com os dados obtidos primeiro, pela simulação com o emprego do MATLAB, segundo, com a gravação direta do instrumento no estúdio do NICS e finalmente com as amostras sonoras obtidas mecanicamente, espera-se determinar o esforço do músico na tentativa de obter uma sonoridade satisfatória do saxofone.

## 6. Referências

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1965) "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York.
- Benade, H. A. (1959) "On Woodwind Instruments Bores", J. Acoust. Soc. Am., 31, 1591-1608.
- Benade, H. A. (1960) "On the Mathematical Theory of Woodwind Finger Holes", J. Acoust. Soc. Am., 32, 1591-1608.
- Benade, H. A. (1985) "Requirements and Techniques for measuring the musical Spectrum of the Clarinet", J. Acoust. Soc. Am., 78, 1475-1498.
- Benade, H. A. (1988) "The Saxophone Spectrum", J. Acoust. Soc. Am., 83, 1900-1907.
- Benade, H. A. (1960) "Horns, Strings and Harmony", Anchor, Garden City, N.Y..
- Benade, H. A. (1976) "Fundamentals of Musical Acoustics", Oxford Univ. Press, Londres e N.Y..
- Fletcher, N. H. (1978) "Mode Locking in Nonlinearly Excited Inharmonic Musical Oscillators", J. Acoust. Soc. Am., 64, 1566-1569.
- Fletcher, N. H. e Rossing, T. D. (1998) "The Physics of Musical Instruments", Springer, 2nd ed..
- Gilbert, J. , Kergomard, J. e Ngoya, E. (1989) "Calculation of the Steady-state Oscillations of a Clarinet Using the Harmonic Balance Technique", J. Acoust. Soc. Am., 86, 35-41.
- Nederveen, C. J. (1998) "Acoustical Aspects of Woodwind Instruments", Northern Illinois Univ. Press.
- Smith III, J. O. (1996) "Physical Modeling Synthesis Update", <http://www-ccrma.stanford.edu/~jos/pubs.html>.
- Stewart, S. E. e Strong, W. J. (1980) "Functional Model of a Simplified Clarinet", J. Acoust. Soc. Am., 68, 109-120.